SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

الدورة الاستدراكية 2005

أسئلة :

1) المعادلة المميزة هي : $r^2+r-6=0$ ، $\Delta=25$ $\Leftarrow$ $r_1=-3$ و $r_2=2$.

حلول المعادلة التفاضلية هي $y=\alpha\, e^{-3x}+\beta\, e^{2x}$ حيث $(\alpha,\beta)\in IR^2$.

2) $1+i\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و $1-i=\left[\sqrt{2},\frac{-\pi}{4}\right]$ $\Leftarrow$ $Z=\left[\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right]$.

3) نضع $u(x)=\ln(1+Cos(x))$ $\Leftarrow$ $u'(x)=\dfrac{-Sin(x)}{1+Cos(x)}$

$v'(x)=Cos(x)$ $\Leftarrow$ $v(x)=Sin(x)$

إذن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos(x)\ln(1+Cos(x))\,dx=\left[Sin(x)\ln(1+Cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Sin^2(x)}{1+Cos(x)}dx$$

$$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-Cos(x)\,dx=\left[x-Sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

4) ملاحظة: (u_n) عبارة عن مجموع متتاليتين، إحداهما حسابية $(v_n=n)$ و الأخرى هندسية $\left(w_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

لدينا إذن

$$S_n=1+2+3+\ldots+n+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{n(n+1)+1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$$

التمرين الأول :

1) $d(\Omega,(P))=\dfrac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\leq r$ $\Leftarrow$ (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة.

2) مركز الدائرة هو H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P)

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω والعمودي على (P)، إذن $\vec{n}(1,0,-1)$ المنظمية على (P) موجهة ل (Δ).

H هي تقاطع (Δ) و (P)، مثلوث إحداثياتها هو حل النظمة:

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=-t\\ x-z+1=0\end{cases}\Rightarrow 1+t+t+1=0$$

إذن $t=-1$ و منه $H(0,0,1)$.

شعاع الدائرة هو $R=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{2}$.

التمرين الثاني:

1) $(1-i)^2=-2i$.

2) نحسب المميز المختصر: $\Delta'=(1+2i)^2+(3-6i)=-2i=(1-i)^2$

إذن $z_1=3i$ و $z_2=2+i$.

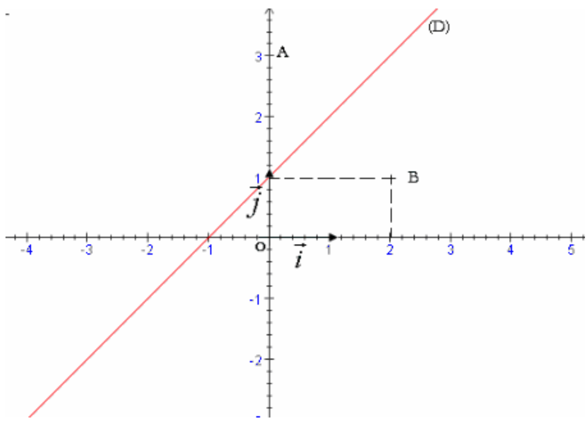
3) لدينا $|z-3i|=|z-2-i| \Leftrightarrow AM=BM$.

إذن (D) مجموعة النقط M هي واسط القطعة $[AB]$.

طريقة تحليلية: نضع $z=x+iy$. إذن $|z-3i|=|z-2-i| \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0$$

إذن (D) مجموعة النقط M هي المستقيم الذي معادلته $(D): x-y+1=0$



التمرين الثالث :

1) ليكن A الحدث : "الحصول على كرة بيضاء" ، إذن $p(A)=\frac{4}{6}$.

2) ليكن B الحدث :" الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط"، $p(B)=C_5^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}$.

3) أ- ليكن C الحدث :"الحصول على كرة بيضاء على الأقل"، إذن $\overline{C}$: " الحصول على n كرة سوداء"

$p(\overline{C})=\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow p(C)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$. (احتمال سحب كرة سوداء هو $\frac{1}{3}$).

ب- لدينا $p\geq 0.999 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\geq 0.999 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n\leq 0.001$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{3}\right)^n\leq \log 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow -n.\log 3\leq -3$$

$$\Leftrightarrow n\geq \frac{3}{\log 3}\approx 6.25$$

إذن ، العدد الأدنى من السحبات هو 7.

مسألة :

(1 أ- $\lim\limits_{0^+} \frac{x}{2-x} = 0^+ \Leftarrow \lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{2^-} \frac{x}{2-x} = +\infty \Leftarrow \lim\limits_{2^-} f(x) = +\infty$.

ب- لكل x من $]0,2[$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)'}{\frac{x}{2-x}} = \frac{2}{(2-x)^2} \cdot \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x(2-x)}$$

ج- جدول التغيرات:

x	0		2
f'(x)	‖	+	‖
f(x)	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

(2 أ- **تذكير:** $A(a,b)$ مركز تماثل للمنحنى C_f $\Leftrightarrow$ $f(2a-x) = 2b - f(x)$ و $2a - x \in D_f$

نبين أن $f(2-x) = -f(x)$: $2-x \in D_f \Leftarrow 0 \prec 2-x \prec 2 \Leftarrow 0 \prec x \prec 2$

و $f(2-x) = \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) = -f(x)$ إذن $A(1,1)$ مركز تماثل للمنحنى.

ب- معادلة (D) هي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و $f'(1) = 2$ ، إذن: $y = 2x - 2$: (D) .

(3 أ- $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \frac{3}{2} \approx -0.4 \prec 0$ و $\varphi\left(\frac{7}{4}\right) = \ln(7) - \frac{7}{4} \approx 0.19 \succ 0$.

ب- الدالة φ متصلة على $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ (فرق دالتين متصلتين) و $\varphi\left(\frac{3}{2}\right).\varphi\left(\frac{7}{4}\right) \prec 0$ ، إذن حسب مبرهنة القيمة الوسيطية فإنه يوجد على الأقل عدد α من $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ حيث $\varphi(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha$.

التأويل المبياني : المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول) في النقطة $I(\alpha,\alpha)$.

(3 أ- f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,2[$ إذن فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} .

(4 ب- f تفابل من $]0,2[$ نحو IR و $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \quad \forall x \in IR, \forall y \in]0,2[$.

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{2-y}\right)$$

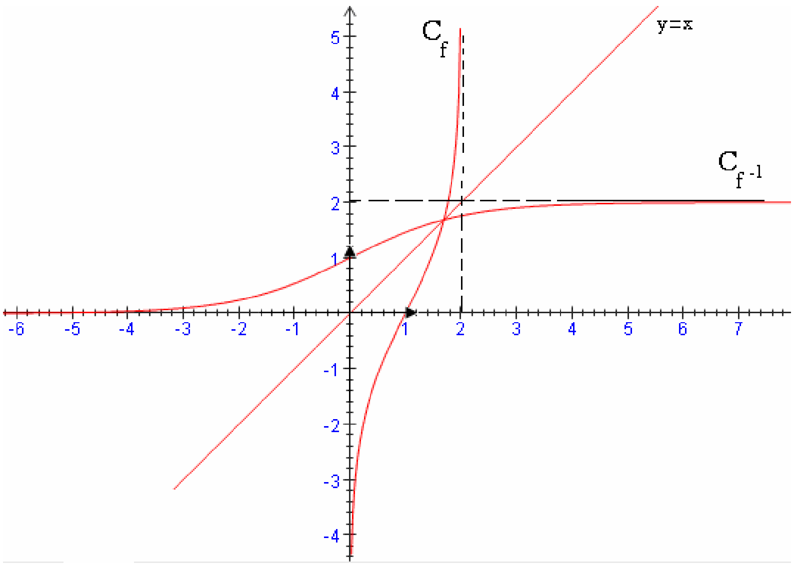
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{2-y}$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - ye^x = y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2e^x}{1+e^x}$$

إذن : $f^{-1}(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} \qquad \forall x \in IR,$

5)المنحنى :



6) أ- لدينا $\frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftarrow \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left[\ln|1+e^x|\right]_0^\alpha$

$$= \ln(1+e^\alpha) - \ln 2$$

<u>نحسب e^α بدلالة α:</u> لدينا $f(\alpha)=\alpha$ يعني $\ln\frac{\alpha}{2-\alpha}=\alpha$

يعني $\frac{\alpha}{2-\alpha}=e^\alpha$

إذن $1+e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$

و بالتالي : $\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = -\ln(2-\alpha)$.

ب- لتكن S مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين (C_f) و$(C_{f^{-1}})$ و محوري المعلم.

إذن : $S = 2\int_0^\alpha \left[f^{-1}(x)-x\right]dx$ (بوحدة قياس المساحات)

$$= 4\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}\,dx - 2\int_0^\alpha x\,dx$$

$$= -4\ln(2-\alpha)-\alpha^2$$

طريقة ثانية : $S = \int_0^\alpha f^{-1}(x)dx - \int_1^\alpha f(x)dx$.

لدينا : $\int_0^\alpha f^{-1}(x)dx = -2\ln(2-\alpha)$. نحسب $\int_1^\alpha f(x)dx$ باستعمال مكاملة بالأجزاء:

نضع $u(x)=\ln\frac{x}{2-x} \Leftarrow u'(x)=\frac{2}{x(2-x)}$.

$v'(x)=1 \Leftarrow v(x)=x$.

إذن : $\int_1^\alpha f(x)dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{2}{2-x}\,dx$

$= \alpha\ln\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) - \left[-2\ln(2-x)\right]_1^\alpha = \alpha^2+2\ln(2-\alpha)$ (لأن $f(\alpha)=\alpha \Leftarrow \ln\frac{\alpha}{2-\alpha}=\alpha$)

و منه : $S=-4\ln(2-\alpha)-\alpha^2$ (بوحدة قياس المساحات).